Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **X,** 5.

SUR L'INTRODUCTION DES FONCTIONS SPHÉRIQUES DANS L'ANALYSE

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1929

On a cru jusqu'ici que les fonctions sphériques de première espèce $P^n(x)$, n étant égal à zero ou à un positif entier, sont introduites dans l'analyse par EULER, puis par LEGENDRE qui ne connaissait pas les développements de son prédécesseur.

EULER part de l'équation différentielle

$$(1) \qquad (1-x^2)\, y'' - 2xy' + n(n+1)\, y = 0,$$

et il démontre qu'elle est satisfaite par le polynome entier

$$y = D_x^n \left[(x^2-1)^n\right],$$

fait qui a plus tard conduit à la formule importante

$$(2) \qquad P^n(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}\, D_x^n \left[(x^2-1)^n\right].$$

LEGENDRE a pris pour point de départ la série de puissances

$$(3) \qquad (1-2\alpha x+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P^n(\alpha)\, x^n,$$

convergente pourvu que

$$|x| < |\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1}|,$$

et il a démontré la formule intégrale

$$(4) \qquad \int_{-1}^{+1} P^m(x)\,P^n(x)\,dx = 0, \quad m \gtrless n;$$

c'est-à-dire que les $P^n(x)$ forment, dans l'intervalle de -1 à $+1$, un système de fonctions orthogonales.

On voit, en intégrant par parties, que la formule (4) est une conséquence immédiate de la formule (2), c'est-à-dire du quotient différentiel d'Euler.

Or, notre opinion sur l'introduction des fonctions sphériques dans l'analyse est fausse, parce que le chevalier de Louville, déjà en 1722, a trouvé les fonctions $P^n(x)$, en indiquant un développement qui n'est au fond autre chose que la formule de Legendre, fait qui m'oblige à donner une correction historique à mon livre sur les fonctions sphériques[1].

Louville a été conduit à sa formule remarquable par un paradoxe apparent de la mécanique.

Galilée avait démontré que des chutes par les cordes quelconques du même cercle vertical sont toutes isocrones; Huygens donnait plus tard sa démonstration intéressante de l'isocronisme des chutes par les différents arcs de la même cycloïde verticale et renversée.

Saurin[2] a défini clairement le paradoxe apparent susdit, comme il suit:

»A cette démonstration [de Huygens] étendue jusqu'au cas de la chute par le dernier arc infiniment petit de la cycloïde, on oppose (et c'est la difficulté) la démonstration

[1] Théorie des fonctions métasphériques. Paris 1911.

[2] Mémoires de l'Academie des sciences 1722, 70.

de GALILÉE, étendue jusqu'au cas de la chute par la corde infiniment petite du cercle«.

Il s'agit donc des arcs infiniment petits issus du point le plus bas de la cycloïde verticale et renversée.

PARENT[1], qui a observé le premier le paradoxe apparent susdit, prétendait que les démonstrations de GALILÉE et de HUYGENS poussées ainsi jusqu'au cas des infiniment petits, se combattent l'une l'autre. Il se déclarait contre la démonstration de HUYGENS et décidait hardiment qu'elle n'était point applicable dans ce cas. De plus, il croyait appuyer solidement sa décision par l'examen de sa démonstration même.

SAURIN[2] démontrait, l'année suivante, qu'une erreur s'était glissée dans les développements de PARENT.

Le même jour que paraissait cet article de SAURIN, il reçut une lettre de PARENT qui faisait remarquer, qu'ayant été averti par l'HÔPITAL depuis quelques temps que SAURIN s'occupait de cette question, il s'était aperçu lui-même de son erreur.

Le premier article de son livre[3], paru en 1703, était consacré à cette question et contenait sa rétraction, mais un extrait que le Journal des savants donnait de cet article offensait PARENT, et SAURIN devint dès lors l'objet de son ressentiment, ce qui se manifestait clairement dans la seconde édition du livre de PARENT[4].

En avril 1720, LOUVILLE proposait à l'Académie des sciences, le paradoxe susdit, sans savoir évidemment que PARENT l'avait déjà observé, il y avait une vingtaine d'années.

[1] Journal des savants du 23 mai 1701.

[2] Mémoires de Trévoux pour l'année 1702.

[3] Recherches de mathématiques et de physique. I—II, Paris 1703—1705.

[4] II, 806; cette édition, de 1713, est en trois volumes.

Louville ne décidait point, ce n'était qu'une difficulté qu'il proposait, et sa modestie lui faisait dire qu'il s'en rapportait à des géométres plus habiles que lui.

Saurin[1] démontrait de nouveau que le paradoxe n'était qu'apparent; c'est-à-dire que les théorèmes de Galilée et de Huygens s'accordent bien.

Louville[2] obtenait le même résultat, et c'est dans ce mémoire qu'il donne sa série remarquable, en étudiant la fonction

$$F(x, p, q) = (p^2 - 2qx - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

dont il indique le développement d'après les puissances ascendantes de x, à savoir[3]

$$\begin{aligned} F(x, p, q) &= \frac{1}{p} + \frac{q}{p^3}x + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{(2q)^2}{p^5} + \frac{1}{2p^3}\right)x^2 + \\ &+ \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{(2q)^3}{p^7} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2q}{p^5}\right)x^3 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(2q)^4}{p^9} + \right. \\ &\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{(2q)^2}{p^7} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{p^5}\right)x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

formule que nous écrivons sous la forme

$$F(x, p, q) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(p, q)\, x^n. \tag{6}$$

Posons ensuite

$$x = ipy, \quad q = \frac{p\alpha}{i},$$

[1] Mémoires de l'Académie des sciences 1722, 70—95.

[2] loc. cit. 128—142.

[3] *Voyez* p. 132 bis.

ce qui donnera

$$F(x,p,q) = \frac{1}{p}(1-\alpha y+y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

de sorte qu'il résulte, en vertu de (3),

$$F(x,p,q) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty} P^n(\alpha)\, y^n,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$F(x,p,q) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{n=\infty} P^n\left(\frac{iq}{p}\right)\left(\frac{x}{ip}\right)^n;$$

c'est-à-dire que nous aurons finalement

$$f_n(p,q) = \frac{i^{-n}}{p^{n+1}} P^n\left(\frac{iq}{p}\right). \tag{7}$$

Remarquons en passant que Fontenelle[1], secrétaire de l'Académie des sciences, a donné une démonstration assez philosophique de la coïncidence des théorèmes de Galilée et de Huygens, en ce qui concerne les arcs infiniment petits. Il remplaçait l'arc infiniment petit de la cycloïde par l'arc correspondant de son cercle osculateur.

Reste encore à donner quelques renseignements sur Louville, qui n'est pas mentionné par Cantor et qui est certainement inconnu à la plupart des géomètres.

[1] Histoire de l'Académie des sciences 1722, 82—89.

Jacques-Eugène d'Allonville de Louville naquit au château de Louville[1] (Eure-et-Loire) le 14 juillet 1671 et mourut à Carré, près d'Orléans, le 10 décembre 1732.

Fils cadet il entra dans le service et se retira avec la charge de colonel pour se consacrer exclusivement à ses études scientifiques. Il devint un astronome distingué, et, en 1714, il fut élu membre de l'Académie des sciences.

Louville exécutait de ses propres mains, dans ses instruments astronomiques, ce qu'il y avait de plus fin et le plus difficile. Il a appliqué le premier le micromètre au quart du cercle et perfectionné d'autres instruments astronomiques. Il a donné des observations exactes du diamètre du soleil, et l'on a de lui une novelle méthode pour calculer la grandeur d'une éclipse de soleil dans un temps donné.

Quant aux publications mathématiques de Louville nous avons déjà mentionné la plus importante; nous pouvons ajouter qu'il était le premier de l'Académie, qui osa se déclarer contre Leibnitz concernant les forces vives. Il continuait ces recherches, et Mairan se joignit à lui avec une nouvelle théorie; c'était alors Jean Bernoulli qu'ils attaquaient.

Ajoutons que Louville a proposé un problème qui fut résolu par Renau, Saurin et Nicole[2].

Ces deux derniers géomètres ont généralisé le problème proposé en celui-ci: Trouver deux nombres qui soient tels que le second soit dans le premier p de fois avec un reste, que ce reste soit dans le second encore p de fois avec un nouveau reste, que ce

[1] Il y avait au moins trois siècles que ses ancêtres possédaient la terre et la seigneurie de Louville.

[2] Mémoires de l'Académie des sciences 1716, 22—26, 26—29, 30—34.

second reste soit dans le premier p de fois, et ainsi de suite à l'infini.

Renau n'étudie que le cas spécial $p = 1$, ce qui est précisément le problème proposé par Louville.

Remarquons encore que notre géomètre a donné des suppléments importants aux recherches de Mairan sur la roue d'Aristote[1].

[1] Histoire de l'Academie des sciences 1715, 31.

Forelagt paa Mødet den 1. November 1929.
Færdig fra Trykkeriet den 30. December 1929.